1113. 淡中先生ノ Hauptgeschlechtssatz im Minimalen ニツイテノ一ツノ注意

松島與三（名大）

淡中先生ハ談話1046ニ於テ次ノ興味アル定理ヲ証明シテ居ラレマス。スナハチ、$\mathfrak{p}$進数体kノn次ノあーべる拡大K/k, KノExponentガnニナルヤウナ因子團$(a_{\sigma,\tau})$ヲトレバ, Kノ$N_{K/k}(A)=1$ナル元Aハ$b^{1-\lambda}$ナル形ノ元ノイクツカト$a_{\sigma,\tau}/a_{\tau,\sigma}$ナル形ノ元イクツカノ積トシテ表ハサレ、逆モ成立ツトイフノデアリマス。

中山先生ハコノ定理ヲ談話1092ニ於テ、與ヘラレタ因子團ト同伴ナ因子團デ、$\dfrac{b_{\sigma,\tau}}{b_{\tau,\sigma}}$ノnormガ1ニナルやうナモノヲイクツカトッテ来レバ一般ノがろあ拡大ニ於テモ、上ノ定理ガ成リ立ツコトヲ証明サレマシタ。

コヽデハ、淡中先生ノ定理ヲツカヘバ、あーべる拡大ノ場合ニ於テ、Hilbertノ定理ノ逆ニ相當スルコトガ簡單ニ証明サレルコトヲ注意シタイト思ヒマス。即チ

kヲ$\mathfrak{p}$一進数体トシ、ソノあーべる拡大K/kヲトル。Kノ$N_{K/k}(A)=1$ナル元Aガ常ニ$b^{1-\lambda}$ナル形ノ元ノミノ積トシテ、表ハサレルナラバ、K/kハzyklischニナル.トイフコトガ言ヘマス。

K/kガあーべる積大ト假定シナクテモ、中山先生ノ擴張サレタ形ノ定理ヲツカッテK/kガ zyklisch ニナルコトガ言ヘルカドウカハマダ分ラナイノデアリマスガ、御教示ヲ得タイト存ジマス。

以下、上ノコトノ証明ヲノベマス。

K/kヨリ次數ノ低イモノニツイテハ成リ立ツトシテ、K/kガ zyklisch ニナルコトヲ言ヒマス，

K/kノ次數ヲn, ソノ Galois 群ヲ$\mathfrak{g}$トスル。

1) nガ、少クトモ二ツノ相異ナル素數デワレル場合。

簡単ノタメ $n = p_1^{a_1} p_2^{a_2}$ トシ、$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \times \mathfrak{g}_2$，$\mathfrak{g}_i$ Order ハ $p_i^{a_i}$ $(i = 1, 2)$ トシ、$\mathfrak{g}_1$ ニ對應スルKノ部分体ヲK_2，$\mathfrak{g}_2$ ニ對應スルモノヲK_1トスル。$(a_{\sigma,\tau})$ヲKニ於ケル Exponent ガnノ因子團トスレバ Chevalley ニヨリ $N_{K/K_1}(a_{\sigma_1,\tau_1})$ $(\sigma_1, \tau_1 \in \mathfrak{g}_1)$ ガK_1ニ於ケル Exponent ガ $p_1^{a_1}$ ノ因子團ニナリ　假定ニヨリ、$\dfrac{a_{\sigma_1,\tau_1}}{a_{\tau_1,\sigma_1}}$ ハ $b^{1-\lambda}$ $(\lambda \in \mathfrak{g}, b \in K)$ ナル形ノ元ノ

積ニナッテヰルカラ

$$N_{K/K_1}\left(\frac{a_{\sigma_1,\tau_1}}{a_{\tau_1,\sigma_1}}\right) \in,\ b_1^{1-\lambda_1} \ (b_1 \in K_1, \lambda_1 \in \mathfrak{g}_1)$$

ナル元ノ積ニナルカラ、淡中先生ノ定理ニヨリ、K_1/kニツイテ、定理ノ假定ガ満サレルコトガワカリ、從ッテ

induction ノ假定カラ、K_1/k ガ zyklisch，同様ニ K_2/k モ zyklisch ニナル。K_1/k ト K_2/k ノ次數ガ互ニ素ダカラ K/k モ zyklisch ニナル。

2) $n=p^a$ ナル場合.

$\mathfrak{G}=\mathfrak{G}_1\times\mathfrak{G}_2\times\cdots\cdots\times\mathfrak{G}_s$; $\mathfrak{G}_i$ ハ zyklisch トスレバ、今ト仝様ニシテ、$\mathfrak{G}/\mathfrak{G}_i$ ハ zyklisch ニナルコトガ言ヘルカラ、$S\leq 2$ デナケレバナラナイ。今 $S=2$ デアルトスル。

$$\mathfrak{G}=\mathfrak{G}_1\times\mathfrak{G}_2,\quad \mathfrak{G}_i=(\sigma_i),$$

$$\mathfrak{G}_i \text{ ノ Order ヲ } p^{a_i}\quad (i=1,2)$$

トスル。

$(a_{\sigma,\tau})$ ヲ Exponent ガ n ノ因子團トスレバ假定ヨリ $\dfrac{a_{\sigma,\tau}}{a_{\tau,\sigma}}$ ハ $b^{1-\lambda}$ ナル形ノ元ノ積ニナルガ $b^{1-\sigma_1}$ $b^{1-\sigma_2}$ ナル形ノ元ノ積ト考ヘテヨイコトハ明ラカデアル。今

$$\frac{a_{\sigma_1,\sigma_2}}{a_{\sigma_2,\sigma_1}}=\frac{c_{\sigma_1}}{c_{\sigma_1}^{\sigma_2}}\cdot\frac{c_{\sigma_2}^{\sigma_1}}{c_{\sigma_2}}$$

トカケテヰルトスル。

因子團 $(a_{\sigma,\tau})$ ニ對應スル $(a_{\sigma,\tau}, K, \mathfrak{G})$ ノ Transformator ヲ $\{u_\sigma\}$ トシ、$u_{\sigma_1}c_{\sigma_1}$, $u_{\sigma_2}c_{\sigma_2}$ ヲ考ヘレバ,

$$u_{\sigma_1}c_{\sigma_1}\cdot u_{\sigma_2}c_{\sigma_2}=u_{\sigma_1\sigma_2}\,a_{\sigma_1,\sigma_2}\,c_{\sigma_1}^{\sigma_2}c_{\sigma_2}$$

$$= u_{\sigma_2\sigma_1}\, a_{\sigma_1,\sigma_2}\, c_{\sigma_1}^{\sigma_2}\, c_{\sigma_2}$$

$$= u_{\sigma_2}\, u_{\sigma_1}\, \frac{a_{\sigma_1,\sigma_2}}{a_{\sigma_2,\sigma_1}} \cdot c_{\sigma_1}^{\sigma_2}\, c_{\sigma_2}$$

$$= u_{\sigma_2} c_{\sigma_2}\ \ u_{\sigma_1} c_{\sigma_1} \frac{a_{\sigma_1,\sigma_2}}{a_{\sigma_2,\sigma_1}}\ \ \frac{c_{\sigma_1}^{\sigma_2}}{c_{\sigma_1}}\ \ \frac{c_{\sigma_2}}{c_{\sigma_2}^{\sigma_1}}$$

$$= u_{\sigma_2} c_{\sigma_2} \cdot u_{\sigma_1} c_{\sigma_1}$$

デアルカラ

$$v_{\sigma_1} = u_{\sigma_1} c_{\sigma_1}, \quad v_{\sigma_2} = u_{\sigma_2} c_{\sigma_2},$$

$\sigma = \sigma_1^{x_1} \sigma_2^{x_2}$ ノトキ, $v_\sigma = v_{\sigma_1}^{x_1} v_{\sigma_2}^{x_2}$ トオケバ,

Transformator $\{v\}$ ニ對應スル因子團 $(b_{\sigma,\tau})$ ハ $(a_{\sigma,\tau})$ ト同伴デ、

$$b_{\sigma,\tau} = b_{\tau,\sigma}$$

ナル條件ヲミタス。

シカラバ, $b_{\sigma,\tau} \in k$ デアル。何トナレバ

$$b_{\rho,\sigma\tau}\ \ b_{\sigma,\tau} = b_{\rho\sigma,\tau}\ b_{\rho,\sigma}^{\tau}$$

$$b_{\tau,\rho\sigma}\ \ b_{\rho,\sigma} = b_{\tau\rho,\sigma}\ b_{\tau,\rho}^{\sigma}$$

$$b_{\rho\tau,\sigma}\ \ b_{\rho,\tau}^{\sigma} = b_{\rho,\tau\sigma}\ b_{\tau,\sigma}$$

ノ三ツヲカケ合セテ、上ノ條件ヲツカヘバ, $b_{\rho,\sigma} = b_{\rho,\sigma}^{\tau}$ ガ出ルカラデアル。

シカラバ

$$(a_{\sigma,\tau},\, K,\, \mathfrak{g}) = (b_{\sigma,\tau},\, K,\, \mathfrak{g})$$

$= (\alpha_1, K_1, \sigma_1) \times (\alpha_2, K_2, \sigma_2)$

（但シ K_1 ハ $\mathfrak{g}_2$ ニ對應スル體，K_2 ハ $\mathfrak{g}_1$ ニ對應スル體）

ト分解出來テ、コレハ $(a_{\sigma,\tau})$ ノ Exponent ガ n ナルコトニ反スル。

故ニ $\mathfrak{g}$ ハ zyklisch デナケレバナラナイ。